Contrôle continu

Exercice 1. Considérons la fonction $f(x) = |x|$. Calculer $\dfrac{df}{dx}$ et $\dfrac{d^2 f}{dx^2}$ au sens des distributions (c'est-à-dire, trouver $(T_f)'$ et $(T_f)''$).

Exercice 2. On considère l'espace V des fonctions continues sur l'intervalle $[0,1]$, à valeurs complexes.

1. Montrer que pour tout $p > 0$ l'application

$$f \mapsto \|f\| = \left\{ \int_0^1 |f(x)|^p \, dx \right\}^{1/p}$$

   définit une norme sur V.

2. Montrer que la suite de fonctions f_n définies par

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{si } 0 \leq x \leq n^{-p-1}, \\ x^{-\frac{1}{p+1}} & \text{si } n^{-p-1} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

   est une suite de Cauchy par rapport à la norme $\|\cdot\|$.

3. Montrer que V n'est pas complet.

Exercice 3. Considérons la fonction $f(x)$ de période 2 définie par

$$f(x) = x \qquad \text{pour } -1 < x \leq 1.$$

1. Développer cette fonction en série de Fourier.

2. En utilisant l'identité de Parseval pour cette série, calculer la somme $1 + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{9} + \ldots = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$.

Exercice 4.

1. Calculer la transformée de Fourier de la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{pour } |x| \leq 1, \\ 0 & \text{pour } |x| > 1. \end{cases}$$

2. En utilisant le résultat, calculer l'intégrale

$$\int_0^{\infty} \frac{t\cos t - \sin t}{t^3} \cos\frac{t}{2} \, dt \,.$$

Exercice 5 (bonus). Calculer la transformée de Fourier de la fonction

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + x^2}\,, \qquad \varepsilon > 0.$$

Considérez la limite du résultat quand $\varepsilon \to 0$ et comparez avec le premier exemple du TD5. Comment peut-on interpréter la limite

$$\frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + x^2} \ ?$$